Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 14

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

21 de abril de 2019

Queremos encontrar la solución a la integral

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x \tag{1}$$

Consideremos la integral compleja

$$\int \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z \tag{2}$$

Esta tiene tres polos, en $z = -i$, $z = 0$ y $z = i$. Podemos hacer la integral en el camino mostrado en la figura 1, entonces la integral la podemos calcular con el teorema de Cauchy:

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z = \oint \frac{e^{iz}}{z(z-i)(z+i)} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{0!} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} \left(\frac{e^{iz}}{z(z+i)} \right) \bigg|_{z=i} = -\frac{\pi i}{e} \tag{3}$$

Calculemos ahora la integral del semicírculo grande:

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}(R^2 e^{2i\theta}+1)} iRe^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta} e^{iR\cos\theta}}{(R^2 e^{2i\theta}+1)} \mathrm{d}\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0 \tag{4}$$

Para el semicírculo pequeño la formula integral de Cauchy para semicírculos, reescribiendo la integral como

$$\int \frac{e^{iz}}{z(z-i)(z+i)} \mathrm{d}z \tag{5}$$

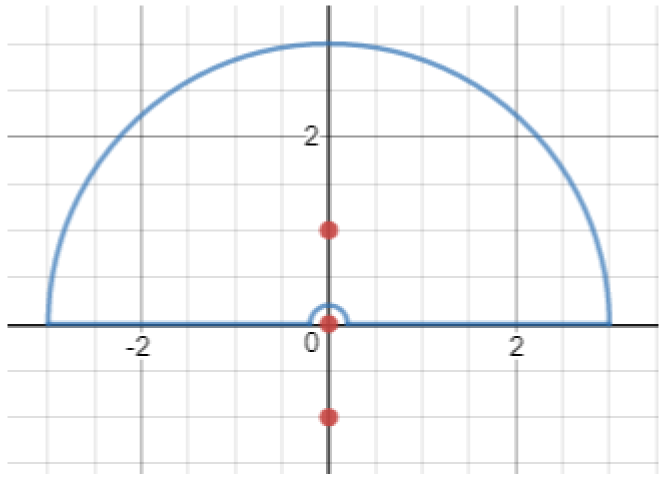

Figura 1: Camino de integración, doy por supuesto que se recorre en sentido antihorario.

Tenemos que la integral vale

$$-\frac{i\pi}{0!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}\left.\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right|_{z=0} = -i\pi \tag{6}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x = -\frac{i\pi}{e} + i\pi = i\pi\frac{e-1}{e} \tag{7}$$

Como $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, pero la integral del coseno es 0 por simetría, tenemos que

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x = \pi\frac{e-1}{e} \approx 1{,}99 \tag{8}$$